

3. Фоменко В. Т. *Омбилические поверхности евклидовых пространств* – Таганрог: Изд. центр Таганрог. гос. пед. ин-та, 2009. – 142 с.

UMBILICAL SURFACES IN EUCLIDEAN SPACES

V.T. Fomenko

Let $ds^2 = E(u, v)(du^2 + dv^2)$, $E \in C^2(R^2)$ be a metric of constant curvature $K \geq 0$, given on the plane R^2 of the parameters (u, v) . Author finds the isometric immersions of the metric ds^2 into Euclidean spaces of dimension n , $3 \leq n \leq 7$ as the umbilical hyperspherical surfaces Φ of the class $C^3(R^2)$ and all of Φ points are the umbilical.

Keywords: Euclidean space, metric, curvature, immersion, umbilical surface.

УДК 514.75

ТОР И ОДНОСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ

М.А. Чешкова¹

¹ *sta41@yandex.ru*; Алтайский государственный университет

В работе приводится пример тора M в E^3 , отличного от классического тора T , который получается при вращении окружности вокруг оси. Мы рассматриваем тор M как поверхность переноса, которая получается при параллельном переносе одной окружности вдоль другой, причем окружности расположены во взаимно ортогональных плоскостях. Пусть на торе M задана замкнутая кривая с помощью 4π -периодической вектор-функции $\rho = \rho(v)$. Используя найденную функцию, определяются уравнения листа Мебиуса, бутылки Клейна и скрещенного колпака. С помощью системы компьютерной математики строятся рассматриваемые поверхности.

Ключевые слова: поверхность переноса, тор, периодическая функция, лист Мебиуса, бутылка Клейна, скрещенный колпак.

Поверхность переноса [1, с. 315], [2, с. 130] – это поверхность, которая допускает параметризацию $r(u, v) = U(u) + V(v)$. Линии $U = U(u)$, $V = V(v)$ называются линиями переноса. Поверхность переноса в E^3 можно рассматривать как параллельное перенесение одной линии вдоль другой. К наиболее известным поверхностям переноса в E^3 относятся эллиптический и гиперболический параболоиды и цилиндр, а в E^4 – это тор Клиффорда $r(u, v) = (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v))$. Кривые переноса тора Клиффорда есть окружности, расположенные во взаимно ортогональных плоскостях.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность переноса M

$$r(u, v) = U(u) + V(v), u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi], \quad (1)$$

где $U = U(u)$, $V = V(v)$ есть окружности, расположенные во взаимно ортогональных плоскостях.

Положим $U(u) = (0, \cos(u), \sin(u))$, $V(v) = (\cos(v), \sin(v), 0)$.

Поверхность переноса (1) примет вид

$$r(u, v) = (\cos(v), \sin(v) + \cos(u), \sin(u)), u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]. \quad (2)$$

Теорема. Поверхность переноса (2) определяет модель тора.

Доказательство.

Действительно, $r(-\pi, v) = U(-\pi) + V(v) = U(-\pi + 2\pi) + V(v) = r(\pi, v)$, $r(u, -\pi) = U(u) + V(-\pi) = U(u) + V(-\pi + 2\pi) = r(u, \pi)$.

Имеем склейку противоположных сторон прямоугольника $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$ по точкам, лежащим на общей горизонтали, и одновременно склейку по точкам, лежащим на общей вертикали [3, с. 75].

Исследуем характер точек на поверхности M . Обычным способом определим гауссову кривизну K поверхности. Имеем

$$K = \frac{\sin(v) \cos(u)}{g^2}, g = 1 - \sin(u)^2 \cos(v)^2. \quad (3)$$

Для параболических точек

$$\sin(v) \cos(u) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) определяет четыре окружности $S_1 : r = r(u, 0)$, $S_2 : r = r(u, \pi)$, $S_3 : r = r(\pi/2, v)$, $S_4 : r = r(-\pi/2, v)$.

Точки пересечения этих окружностей

$$P_1(\pi/2, 0) = (1, 0, 1), P_2(-\pi, 0) = (1, 0, -1), P_3(\pi/2, \pi) = (-1, 0, 1), P_4(-\pi/2, \pi) = (-1, 0, -1).$$

есть особые точки. Для них $g = 0$.

Замечаем, что

$$P_1 \in S_1, P_1 \in S_3, P_2 \in S_1, P_2 \in S_4, P_3 \in S_3, P_3 \in S_2, P_4 \in S_3, P_4 \in S_2.$$

Для гиперболических точек

$$\sin(v) \cos(u) < 0.$$

Для эллиптических точек

$$\sin(v) \cos(u) > 0.$$

На гиперболической части тора определяются две «диагональные» прямые $l_{14} = (P_1, P_4) : r = (\sin(u), 0, \sin(u))$, $l_{23} = (P_2, P_3) : r = (-\sin(u), 0, \sin(u))$.

Построим параболические, эллиптические и гиперболические точки поверхности T , прямые l_{14} , l_{23} (рис.1).

Рассмотрим на торе M кривую $v = \frac{u}{2}$, $u \in [-2\pi, 2\pi]$. Имеем обмотку тора $\rho(u) = (\cos(u/2), \sin(u/2) + \cos(u), \sin(u))$, $u \in [-2\pi, 2\pi]$.

Вектор-функцией $\rho = \rho(u)$ есть 4π -периодическая, функция $s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u + 2\pi))$ есть 2π -периодическая, а функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u + 2\pi))$ есть 2π -антипериодическая.

С помощью этих функций можно построить модели односторонних поверхностей [4, с. 19, с. 27, с. 56].

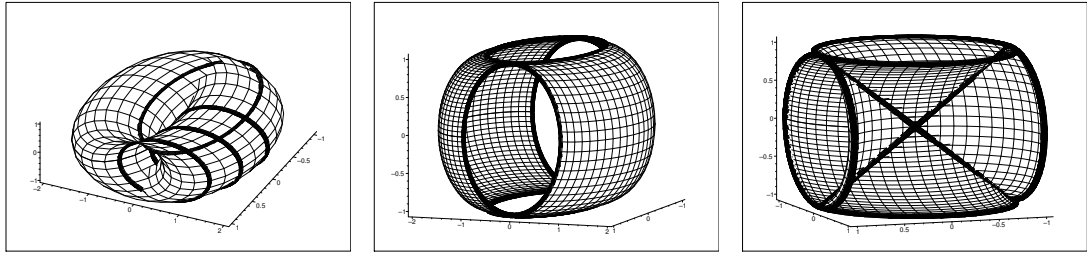


Рис. 1. Поверхность переноса M , параболические, эллиптические и гиперболические точки поверхности M , прямые l_{14} , l_{23} .

Лист Мебиуса. Поверхность

$$r(u, v) = s(u) + vl(u), u \in [-\pi, \pi], v \in [-1, 1]$$

есть модель листа Мебиуса, для которого кривая $\rho = \rho(u)$ есть край.
Построим его (рис. 2).

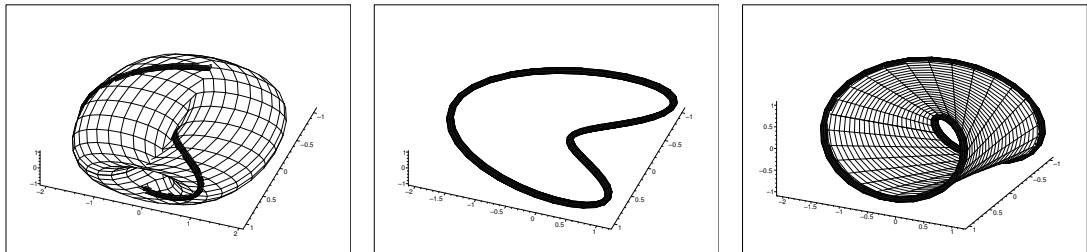


Рис. 2. Обмотка тора M , лист Мебиуса.

Бутылка Клейна. Поверхность

$$r(u, v) = (p + \cos(v))s(u) + \sin(v)l(u), p \neq \mp 1,$$

$u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$ определяет модель бутылки Клейна.

Бутылку Клейна можно разрезать на два листа Мебиуса. В качестве кривой разреза возьмем, например, кривую $r = r(u, \pi/3)$. Построим их, полагая $p = 2$ (рис. 3).

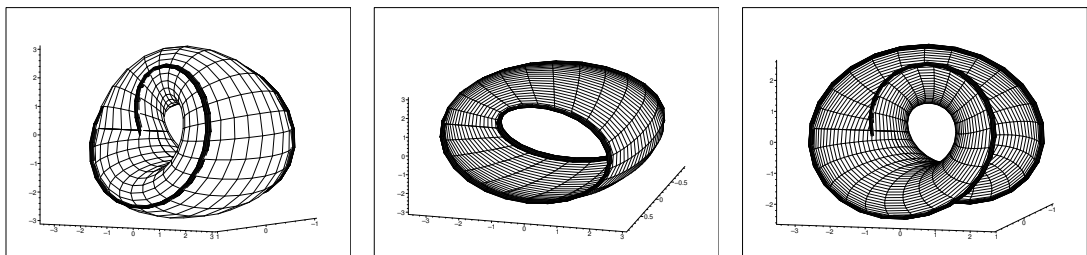


Рис. 3. Бутылка Клейна и разрез, листы Мебиуса на бутылке Клейна.

Скращенный колпак с крышкой. Поверхность P

$$r(u, v) = (1 + \cos(v))s(u) + \sin(v)l(u),$$

$u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$ определяет модель проективной плоскости (скращенный колпак с крышкой).

Скращенный колпак с крышкой содержит лист Мебиуса. Построим их (рис. 4).

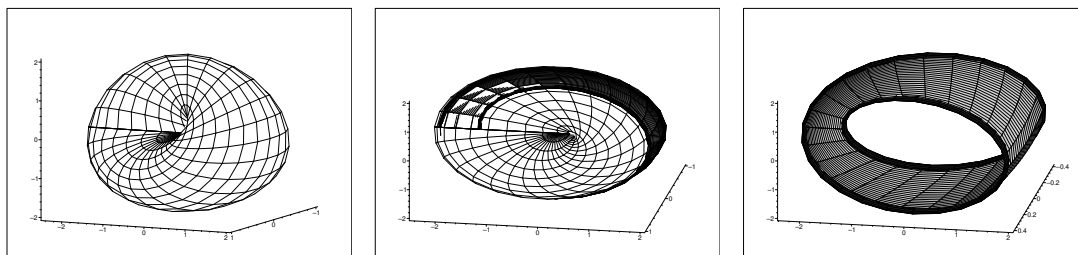


Рис. 4. Скрещенный колпак с крышкой и лист Мебиуса на нем.

Литература

1. Шуликовский В. И. *Классическая Дифференциальная геометрия*. – М.: 1963. –540 с.
2. Кривошапко С. Н., Иванов В. Н., Халаби С. М. *Аналитические поверхности*. – М.: 2006. –539 с.
3. Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н. *Введение в топологию*. – М.: 1995. –414 с.
4. Чешкова М. А. *Односторонние поверхности*. – Барнаул: 2016. –82 с.

TORUS AND ONE-SIDED SURFACES

M.A. Cheshkova

We study the torus M which is different from the classic torus T obtained by rotating a circle along the axis. We consider the torus M as the surface of parallel transfer of one circle along the other. We define a closed curve on the torus M using 4π -periodic vector-function $\rho = \rho(v)$. Using the obtained function we define equations of the Möbius band, Klein bottle and cross-cap. We constructed the studied surfaces in Euclidean space E^3 with the help of mathematical package.

Keywords: surface of parallel transfer, torus, periodic function, Klein bottle, Möbius band, cross-cap.

УДК 514.76

НЕГОЛОНОМНОСТЬ ФАКТОР-МНОГООБРАЗИЯ ГОЛОНОМНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПОЛУГОЛОНОМНОМ ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ

Ю.И. Шевченко¹, Е.В. Скрыдлова²

¹ eskrydlova@kantiana.ru; Балтийский Федеральный университет им. И. Канта, Институт физико-математических наук и информационных технологий

² eskrydlova@kantiana.ru; Балтийский Федеральный университет им. И. Канта, Институт физико-математических наук и информационных технологий

С помощью структурных уравнений Лаптева определены голономное, полуголономное, внутренне и внешне неголономные гладкие многообразия. На гладком многообразии рассмотрено голономное распределение, которое порождает фактор-многообразие. Доказано, что фактор-многообразие полуголономного многообразия является внутренне и внешне неголономным, а фактор-многообразие голономного многообразия голономно.

Ключевые слова: Голономное многообразие, полуголономное многообразие, внутренне и внешне неголономные многообразия.